Introduction au Domaine de Recherche : La théorie de l'irrationnalité par le prisme des surfaces formelles-analytiques

Louise Nataf, encadrée par François Charles

1 Introduction

La discussion qui suit vise à contextualiser la preuve par Frank Calegari, Vesselin Dimitrov et Yunqing Tang en 2024 de l'irrationnalité de la quantité

$$L(2,\chi_{-3}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(3n+1)^2} - \frac{1}{(3n+2)^2} \right) .$$

Pour ce faire, on fera un bref historique de la théorie de l'irrationnalité, puis on se concentrera sur le cas des séries L de Dirichlet

$$L(k,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^k} ,$$

où $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est un caractère de Dirichlet, c'est-à-dire une fonction multiplicative vérifiant quelques propriétés arithmétiques supplémentaires. L'irrationnalité des valeurs $L(k,\chi)$ reste largement conjecturale. Un cas particulier de séries L est celui des séries de Riemann

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} ,$$

et on étudiera en détail la preuve par Roger Apéry en 1978 de l'irrationnalité de $\zeta(3)$. Ensuite, on esquissera comment Calegari, Dimitrov et Tang se sont inspirés de la preuve d'Apéry pour trouver une nouvelle méthode de preuve d'irrationnalité. Enfin, on expliquera le lien de cette méthode avec un objet développé par Jean-Benoît Bost et François Charles, les surfaces arithmétiques formelles-analytiques.

2 Un bref historique des résultats d'irrationnalité

La découverte des nombres irrationnels est généralement attribuée à la secte de Pythagoriciens avec le nombre $\sqrt{2}$ (voir l'article grand public [Kla25]). D'après l'historien des mathématiques grecques Thomas Heath, Platon décrit dans le *Théétète* la preuve par Théodore de Cyrène (vers l'an 400 av. J.-C.) de l'irrationnalité des $\sqrt{k}$ pour les $k \in \{3,\dots,17\}$ non carrés, ce qui implique que l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ était déjà prouvée ([Hea21,

p. 155]). Une preuve complète de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ est fournie dans le livre X des *Éléments* d'Euclide ([Hea21, p. 157]), et suggère que le résultat était déjà connu depuis longtemps ([Hea21, p. 168]). Il s'agit d'une preuve par l'absurde, qui montre que si la diagonale d'un carré était rationnelle, un même entier serait à la fois pair et impair ([Hea21, p. 168]). Après une très longue période sans résultat notable, Euler montre en 1737 et publie en 1744 dans [Eul44] la preuve de l'irrationnalité de e à l'aide de fractions continues, et Lambert montre en 1761 dans [Lam61] l'irrationnalité de π.

Un sujet intimement lié à l'irrationnalité est celui des nombres algébriques, c'est-à-dire des nombres complexes qui sont racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. En effet, un nombre rationnel est toujours algébrique, donc tout nombre transcendant (c'est-à-dire non algébrique) est *a fortiori* irrationnel. C'est en 1844, dans [Lio44], que Liouville établit l'existence de nombres transcendants en exhibant des exemples définis par des fractions continues. Il y donne également une classe de transcendants plus simples à construire, les nombres de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} m^{-n!}$ où m est un entier supérieur ou égal à 2 (pour $m = 10$, on parle de la « constante de Liouville »). Hermite prouve la transcendance de e en 1873 dans [Her73]. En 1882, Lindemann énonce dans [Lin82] le théorème d'Hermite-Lindemann qui affirme que si a est un nombre algébrique non nul (réel ou complexe), alors e^a est transcendant. Il en découle, par l'identité d'Euler, que π est transcendant. En 1934, Gelfond et Schneider démontrent indépendamment ([Gel34], [Sch35]) le théorème de Gelfond-Schneider, qui résout le 7^e problème de Hilbert en affirmant que si a est un nombre algébrique différent de 0 et de 1 et si b est un nombre algébrique irrationnel alors a^b est transcendant. En 1966, Alan Baker résout la conjecture de Gelfond et démontre un des théorèmes les plus forts de la théorie des nombres transcendants, qui généralise les théorèmes d'Hermite-Lindemann et de Gelfond-Schneider :

Théorème 2.1 ([Bak66])**.** *On note L l'ensemble des « logarithmes de nombres algébriques (non nuls) », c'est-à-dire des nombres complexes dont l'exponentielle est un nombre algébrique, et $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques. Si n éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de L sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, alors les $n+1$ éléments $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$-linéairement indépendants.*

Malgré ces avancées, on ne sait toujours pas, par exemple, si des expressions aussi simples que $\pi + e$ et $e\pi$ correspondent à des nombres rationnels. On peut se demander ce qu'il en est des valeurs de la fonction ζ de Riemann, ou de ses généralisations par les séries L de Dirichlet.

3 Le cas des séries L de Dirichlet

On commence par quelques rappels sur les caractères de Dirichlet.

Définition 3.1. Soit m un entier strictement positif. Une application $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est un *caractère de Dirichlet* modulo m si pour tous entiers a et b, on a :

(i) $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ (χ est *complètement multiplicative*) ;
(ii) $\chi(a) = 0$ si et seulement si a et m sont premiers entre eux ;
(iii) $\chi(a+m) = \chi(a)$ (χ est m-périodique).

En d'autres termes, χ est obtenu en étendant par 0 un morphisme de groupes $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ entre les groupes des inversibles de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{C}$ en une application $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, puis en précomposant par $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exemple 3.1. Pour tout $m > 1$, on a un caractère modulo m qui correspond au morphisme trivial $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$. On dit que c'est le *caractère principal modulo* m.

Exemple 3.2. Pour tout p premier impair et a entier, on a le *symbole de Legendre* défini par

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p|a, \\ 1 & \text{si } a \text{ est un carré modulo } p \text{ mais n'est pas divisible par } p, \\ -1 & \text{si } a \text{ n'est pas un carré modulo } p. \end{cases}$$

L'application $a \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$ est un caractère de Dirichlet modulo p.

Pour un caractère de Dirichlet $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, on définit la fonction L de Dirichlet

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \ , \quad \mathrm{Re}(s) > 1 \ .$$

Cette fonction peut être étendue en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Quand χ est le caractère principal modulo 1, c'est-à-dire que χ est constant égal à 1, on retrouve la fonction ζ de Riemann. On va s'intéresser aux séries L de Dirichlet (c'est-à-dire les valeurs de fonctions de Dirichlet) qui correspondent à une classe particulière de caractères de Dirichlet que l'on va définir après quelques préliminaires :

Définition 3.2. Soit $d \in \mathbb{Z}$ sans facteur carré, $d \neq 1$. Le *discriminant* du corps quadratique $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est l'entier

$$D_K = \begin{cases} d & \text{si } d \equiv 1 \pmod 4, \\ 4d & \text{si } d \equiv 2,3 \pmod 4. \end{cases}$$

On appellera *discriminant quadratique* un entier qui est discriminant d'un corps quadratique (ce corps est alors uniquement déterminé).

Définition 3.3. On peut étendre le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ en un *symbole de Jacobi* $\left(\frac{a}{n}\right)$ défini pour tous $a, n \in \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

(i) pour p premier impair, $\left(\frac{a}{p}\right)$ est le symbole de Legendre ;

(ii) $\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ est pair}, \\ 1 & \text{si } a \equiv \pm 1 \pmod 8, \\ -1 & \text{si } a \equiv \pm 3 \pmod 8) \ ; \end{cases}$

(iii) $\left(\frac{a}{1}\right) = 1$;

(iv) $\left(\frac{a}{-1}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq 0, \\ -1 & \text{si } a < 0 \ ; \end{cases}$

(v) si $n = up_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ avec $u = \pm 1$ et les p_i premiers, $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{u}\right) \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a}{p_i}\right)^{e_i}$;

(vi) $\left(\frac{a}{0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = \pm 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On peut maintenant définir, pour tout discriminant quadratique D,

$$\chi_D(n) = \left(\frac{D}{n}\right) .$$

C'est un caractère de Dirichlet modulo $|D|$ ([MV06], théorème 9.13).

Remarque 3.1. En fait, le théorème 9.13 de [MV06] dit que les χ_D pour D discriminant quadratique sont exactement les caractères quadratiques primitifs modulo $|D|$, c'est-à-dire les caractères qui sont d'ordre 2 dans le groupe des caractères modulo $|D|$ et qui ne viennent pas d'un caractère de Dirichlet modulo un diviseur strict de $|D|$.

Un intérêt des caractères χ_D est qu'ils permettent de relier, pour tout K corps quadratique, la fonction de zêta de Dedekind

$$\zeta_K(s) = \sum_{I \subseteq \mathcal{O}_K} \frac{1}{[\mathcal{O}_K : I]^s} , \quad \operatorname{Re} s > 1 ,$$

où I parcourt les idéaux non nuls de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K, à la fonction zêta de Riemann par la relation suivante (voir [Coh07], théorème 10.5.25) :

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi_{D_K}) .$$

On a par Euler ([Eul40]) et Dirichlet ([Dir37]) :

$$L(k, \chi_D) \in \begin{cases} \pi^k \sqrt{D} \cdot \mathbb{Q}^\times & \text{si } k \text{ pair et } D > 0, \\ \pi^k \sqrt{-D} \cdot \mathbb{Q}^\times & \text{si } k \text{ impair et } D < 0, \\ \sqrt{D} \log\left(|\overline{\mathbb{Q}}^\times| - \{1\} \right) & \text{si } k = 1 \text{ et } D > 1. \end{cases}$$

(Dans tout ce mémoire, « log » désignera le logarithme népérien). Par le théorème d'Hermite-Lindemann, toutes ces valeurs sont transcendantes. Les autres sont bien moins connues : l'irrationnalité de $\zeta(3)$ a été montrée en 1978 (donc beaucoup plus tard) par Apéry ([Apé79]) et celle de $L(2, \chi_{-3})$ en 2024 par Calegari, Dimitrov et Tang dans l'article [CDT24]. On sait par ailleurs grâce à Ball et Rivoal ([Riv00], [BR01]) que la fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, et grâce à Zudilin [Zud01] qu'au moins une des valeurs $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ et $\zeta(11)$ est irrationnelle. On va commencer par étudier la preuve d'Apéry.

4 La preuve par Apéry de l'irrationnalité de $\zeta(3)$

La discussion qui suit de la preuve d'Apéry est inspirée de son explication par Cohen dans [Coh78]. Les seuls résultats de théorie des nombres qui vont être utilisés sont le théorème des nombres premiers et le lemme élémentaire suivant, conséquence du fait qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire :

Lemme 4.1. *S'il existe une suite de rationnels $p_n/q_n \neq \beta$ avec $q_n \to \infty$ telle que*

$$\left| \beta - \frac{p_n}{q_n} \right| = o\left(\frac{1}{q_n}\right)$$

alors β est irrationnel.

Pour commencer, Apéry définit des suites

$$a_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k} \ ,$$

$$\text{avec} \quad c_{n,k} = \sum_{1\le m\le n} \frac{1}{m^3} + \sum_{1\le m\le k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \ .$$

On a alors que b_n/a_n converge vers $\zeta(3)$; c'est la proposition 2 de [Coh78] dont le point clef de la preuve est la majoration de $|c_{n,k} - \zeta(3)|$ par $2n^{-2}$, par des considérations sur les coefficients binomiaux apparaissant dans la définition de $c_{n,k}$. De plus, si on note $[1,\ldots,n]$ le plus petit commun multiple des entiers de 1 à n, on a

$$a_n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad 2[1,\ldots,n]^3 b_n \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout} \quad n \ge 1 \ ;$$

c'est la proposition 3 de [Coh78] dont la preuve consiste à regarder les valuations p-adiques des quantités dont on veut montrer qu'elles sont entières. Donc les nombres

$$p_n = 2[1,\ldots,n]^3 b_n \quad \text{et} \quad q_n = 2[1,\ldots,n]^3 a_n$$

sont entiers et leur quotient $p_n/q_n = b_n/a_n$ tend vers $\zeta(3)$.

Par ailleurs, a_n et b_n vérifient tous deux la relation de récurrence

$$(n+1)^3 u_{n+1} - \left(34n^3 + 51n^2 + 27n + 5\right) u_n + n^3 u_{n-1} = 0 \ ;$$

c'est la propriété 1 de [Coh78], qui se montre par de longs calculs, un peu simplifiés par une idée de Zagier. On en déduit la relation

$$b_n a_{n-1} - a_n b_{n-1} = 6n^{-3} \ .$$

Par télescopage, on a donc

$$\zeta(3) - \frac{b_n}{a_n} = \sum_{k\ge n+1} \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}}\right) = \sum_{k\ge n+1} \frac{6}{k^3 a_k a_{k-1}} \ .$$

Comme cette suite est strictement croissante, on a $\zeta(3) \neq b_n/a_n$ pour tout n. Par ailleurs, en utilisant soit la récurrence, soit la formule explicite, on montre l'estimée

$$a_n \sim C\alpha^n n^{-3/2} \ ,$$

où $C = (\sqrt{2}+1)^2(2\pi\sqrt{2})^{-3/2}$ et $\alpha = (\sqrt{2}+1)^4$. On a donc

$$\frac{6}{n^3 a_n a_{n-1}} \sim \frac{6}{C^2\alpha^{2n-1}}$$

d'où

$$\sum_{k\ge n+1} \frac{6}{k^3 a_k a_{k-1}} \sim \sum_{k\ge n+1} \frac{6}{C^2\alpha^{2k-1}} = \frac{6}{C^2(\alpha-1)}\alpha^{-2n} \ .$$

On en déduit que

$$\zeta(3)a_n - b_n \sim C'\alpha^{-n} n^{-3/2} \quad \text{avec} \quad C' = \frac{6}{C(\alpha-1)} \ .$$

On remarque l'équivalence

$$\left|\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n}\right| = o\left(\frac{1}{q_n}\right) \quad \iff \quad [1,\dots,n]^3 \left|\zeta(3)a_n - b_n\right| \to 0$$
$$\iff \quad [1,\dots,n]^3 \alpha^{-n} n^{-3/2} \to 0 \ .$$

Or on a le résultat suivant sur le comportement asymptotique de $[1,\dots,n]$:

Théorème 4.1. $\log[1,\dots,\lfloor x\rfloor] \sim x$ *quand* $x \to +\infty$.

Démonstration. On regarde la fonction de Tchebychev

$$\psi(x) = \sum_{p^r \leq x} \log p \ .$$

On a

$$\exp(\psi(x)) = \prod_{p^r \leq x} p = \prod_p \left(\prod_{r|p^r \leq x} p\right) = \prod_p p^{\max\{r|p^r \leq x\}} \ .$$

Or, $\{r|p^r \leq x\} = \{v_p(1),\dots,v_p(\lfloor x\rfloor)\}$, donc

$$\exp(\psi(x)) = \prod_p p^{\max\{v_p(1),\dots,v_p(\lfloor x\rfloor)\}} = [1,\dots,\lfloor x\rfloor] \ .$$

Par ailleurs Tchebychev a montré l'équivalence

$$\frac{\psi(x)}{x} \sim \frac{\pi(x)}{x/\log x} \quad \text{quand} \quad x \to +\infty \ ,$$

où $\pi(x) = \sum_{p<x} 1$ est la fonction de comptage des nombres premiers (voir [Hav03] pour la preuve). Le résultat que l'on veut montrer est donc équivalent au théorème des nombres premiers. □

Il résulte du théorème 4.1 que

$$\log\left([1,\dots,n]^3 \alpha^{-n} n^{-3/2}\right) = -(\log\alpha - 3)n + o(n) \ .$$

Enfin, on utilise l'inégalité

$$4\log(\sqrt{2}+1) > 3 \ , \qquad (\star)$$

pour déduire que $[1,\dots,n]^3 \alpha^{-n} n^{-3/2} \to 0$ et donc

$$[1,\dots,n]^3 \left|\zeta(3)a_n - b_n\right| \to 0 \ .$$

On conclut alors à l'irrationnalité de $\zeta(3)$ avec le lemme 4.1. On va à présent regarder comment la preuve d'Apéry a inspiré celle de Calegari, Dimitrov et Tang.

5 Idée de la preuve par Calegari, Dimitrov et Tang de l'irrationnalité de $L(2, \chi_{-3})$

La discussion qui suit s'inspire de la partie 1.2 de [CDT24], l'article de Calegari, Dimitrov et Tang qui prouve l'irrationnalité de $L(2, \chi_{-3})$. On remarque que l'on peut reformuler la preuve d'Apéry avec le langage des séries formelles en posant

$$A(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n \ , \quad B(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$$

et en regardant la combinaison linéaire

$$P(x) = B(x) - \zeta(3)A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(b_n - \zeta(3)a_n\right) \ .$$

L'estimée $a_n \sim C\alpha^n n^{-3/2}$ dit que $A(x)$ a rayon de convergence $\alpha^{-1} = (\sqrt{2}-1)^4$, et comme $b_n \sim \zeta(3)a_n$, $B(x)$ a le même rayon de convergence que $A(x)$. L'estimée $\zeta(3)a_n - b_n \sim C'\alpha^{-n}n^{-3/2}$ dit quant à elle que $P(x)$ a rayon de convergence $\alpha = (\sqrt{2}+1)^4$. En écrivant l'inégalité $(\star)$, on affirme en fait que $P(x)$ converge sur un disque assez grand pour que l'on puisse conclure directement. Dans plusieurs autres cas que celui de $\zeta(3)$, on peut construire des fonctions $A(x)$, $B(x)$ analogues à celles d'Apéry telles que $P(x) = B(x) - \eta A(x)$ ait des propriétés de convergence supplémentaires, et $\eta = L(k, \chi)$ soit en fait l'unique nombre complexe vérifiant ces propriétés de convergence. Mais l'inégalité analogue à $(\star)$ est fausse (sauf pour $\zeta(2)$) ; $P(x)$ ne converge pas sur un disque assez grand pour que l'on puisse en tirer des conséquences arithmétiques sur $L(k, \chi)$. L'idée de Calegari, Dimitrov et Tang est alors d'exploiter, ce qu'ils sont sont les premiers à faire, l'existence de structures supplémentaires sur $P(x)$. En effet, il se trouve que les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ d'Apéry satisfont toutes deux une équation différentielle ordinaire à coefficients dans $\mathbb{Z}[x]$ qui n'a des points singuliers (réguliers) qu'en $x = 0$, ∞, et $(\sqrt{2} \pm 1)^4$. La fonction $P(x)$ s'obtient alors comme l'unique combinaison linéaire (à homothétie près) de $A(x)$ et $B(x)$ qui est également holomorphe en $(\sqrt{2}-1)^4$. Ceci implique que $P(x)$ n'est pas seulement holomorphe sur le disque de rayon $(\sqrt{2}+1)^4$, mais s'étend en une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C} \setminus \left[(\sqrt{2}+1)^4, \infty\right)$.

En général, on sait grâce à André ([And89, §VIII 1.6]) que les fonctions vérifiant certaines conditions (analogues à celles vérifiées par la fonction $P(x)$ d'Apéry) sur la croissance de leurs dénominateurs et leurs propriétés analytiques se trouvent toujours être solutions d'équations différentielles ordinaires à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$, et donc le $\mathbb{Q}(x)$-espace vectoriel engendré par les dérivées successives de telles fonctions est de dimension finie. Calegari, Dimitrov et Tang fournissent alors des versions effectives de ce résultat. Plus précisément, si l'on se donne une fonction holomorphe $\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ ainsi que des paramètres $b \in \mathbb{Q}_+$, $\sigma \in \mathbb{N}$, et si l'on regarde le $\mathbb{Q}(x)$-espace vectoriel $\mathcal{H}(\varphi; b; \sigma)$ linéairement engendré par les séries formelles de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{[1, \ldots, \lfloor bn \rfloor]^\sigma} \in \mathbb{Q}[\![x]\!] \ , \quad a_n \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tels que $f(\varphi(z))$ converge sur $\mathbb{D}$, Calegari, Dimitrov et Tang montrent des bornes explicites sur la $\mathbb{Q}(x)$-dimension de $\mathcal{H}(\varphi; b; \sigma)$ (les dénominateurs des séries de $\mathcal{H}(\varphi; b; \sigma)$ ont été inspirés par des conjectures sur les séries de Taylor associées à des G-fonctions ([FR16])). Si l'on a alors une fonction d'approximation $P(x) = B(x) - \eta A(x)$ et l'on suppose par l'absurde que $\eta \in \mathbb{Q}$, on peut espérer obtenir une contradiction avec la structure de $P(x)$. C'est, moyennant quelques subtilités, la méthode qu'emploient Calegari, Dimitrov et Tang pour montrer l'irrationnalité de $L(2, \chi_{-3})$. Le cœur de la preuve se situe dans l'obtention d'une borne sur la dimension de $\mathcal{H}(\varphi; b; \sigma)$ qui soit assez bonne pour conclure.

6 Majorations de dimension et lien avec les surfaces formelles-analytiques

Calegari, Dimitrov et Tang ont d'abord montré, dans le cas $\sigma = 0$ et en supposant $\varphi(0) = 0$, $|\varphi'(0)| > 1$, la majoration

$$\dim_{\mathbb{Q}(x)} \mathcal{H}(\varphi; b; 0) \leq \exp\left(\frac{\int_0^1 \max(0, \log|\varphi(e^{2i\pi t})|)dt}{\log|\varphi'(0)|}\right) .$$

Prouvée en 2021 dans leur article [CDT21], cette première majoration leur a permis, alors qu'ils cherchaient déjà à montrer l'irrationnalité de $L(2, \chi_{-3})$, de résoudre au passage une conjecture sur les formes modulaires datant de 1971 : la Conjecture des Dénominateurs Bornés (voir [CDT21] pour la preuve). On peut généraliser cette majoration en

$$\dim_{\mathbb{Q}(x)} \mathcal{H}(\varphi; b; \sigma) \leq \exp\left(\frac{\int_0^1 \max(0, \log|\varphi(e^{2i\pi t})|)dt}{\log|\varphi'(0)| - b\sigma}\right)$$

si l'on suppose $|\varphi'(0)| > e^{b\sigma}$. Malheureusement, cette majoration n'est pas assez fine pour la preuve d'irrationnalité.

Dans [BC], Bost et Charles remarquent que l'on peut voir les fonctions de $\mathcal{H}(\varphi; b; 0)$ comme des sections méromorphes d'une surface arithmétique formelle-analytique, c'est-à-dire d'un objet géométrique qui englobe à la fois les propriétés arithmétiques (relatives aux coefficients) et analytiques des fonctions considérées. Ils se ramènent alors à un raisonnement géométrique, où la condition $|\varphi'(0)| > 1$ devient une condition de « pseudoconcavité » sur la surface formelle-analytique considérée. Grâce à cette étude, il obtiennent une majoration plus fine dans le cas $\sigma = 0$ ([BC], corollaire 8.3.5) :

$$\dim_{\mathbb{Q}(x)} \mathcal{H}(\varphi; b; 0) \leq \frac{\int_0^1 \int_0^1 \log|\varphi(e^{2i\pi s}) - \varphi(e^{2i\pi t})|dsdt}{\log|\varphi'(0)|} .$$

Ce calcul se généralise en

$$\dim_{\mathbb{Q}(x)} \mathcal{H}(\varphi; b; \sigma) \leq \frac{\int_0^1 \int_0^1 \log|\varphi(e^{2i\pi s}) - \varphi(e^{2i\pi t})|dsdt}{\log|\varphi'(0)| - b\sigma} ,$$

ce qui n'est toujours pas assez fin. Calegari, Dimitrov et Tang ont alors abandonné la théorie des surfaces formelles-analytiques et trouvé des raffinements *ad hoc*. On peut néanmoins se demander si les surfaces formelles-analytiques ne pourraient pas fournir directement des bornes suffisantes à la preuve de l'irrationnalité de $L(2, \chi_{-3})$, et ce faisant simplifier considérablement cette preuve ainsi qu'ouvrir à d'autres applications en théorie de l'irrationnalité.

7 Conclusion

On a vu que la preuve par Calegari, Dimitrov et Tang de l'irrationnalité de $L(2, \chi_{-3})$ reposait sur un raffinement puissant de la preuve par Apéry de l'irrationnalité de $\zeta(3)$, en calculant une borne sur un espace de fonctions vérifiant des propriétés sur la croissance de leurs dénominateurs et leur convergence. On a également vu que le formalisme des surfaces formelles-analytiques, bien que n'intervenant finalement pas dans la preuve de Calegari, Dimitrov et Tang, était prometteur pour simplifier cette preuve et ouvrir à d'autres applications.

Références

[And89] Yves André. *G-functions and geometry.* T. E13. Aspects of Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1989.

[Apé79] Roger Apéry. "Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$". In : *Astérisque* 61 (1979), p. 11-13.

[Bak66] A. Baker. "Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. I, II, III". In : *Mathematika* 13 (1966), 204-216, ibid. 14 (1967), 102-107, ibid. 14 (1967), 220-228.

[BR01] Keith Ball et Tanguy Rivoal. "Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs". In : *Inventiones Mathematicae* 146.1 (2001), p. 193-207.

[BC] Jean-Benoît Bost et François Charles. *Quasi-projective and formal-analytic arithmetic surfaces.* À paraître dans Annals of Mathematics Studies. arXiv : 2206.14242 [math.AG]. URL : https://arxiv.org/abs/2206.14242.

[CDT21] Frank Calegari, Vesselin Dimitrov et Yunqing Tang. *The Unbounded Denominators Conjecture.* 2021. arXiv : 2109.09040 [math.NT]. URL : https://arxiv.org/abs/2109.09040.

[CDT24] Frank Calegari, Vesselin Dimitrov et Yunqing Tang. *The linear independence of* 1*,* $\zeta(2)$*, and* $L(2, \chi_{-3})$. 2024. arXiv : 2408.15403 [math.NT]. URL : https://arxiv.org/abs/2408.15403.

[Coh07] Henri Cohen. *Number Theory Volume II : Analytic and Modern Tools.* 1re éd. T. 240. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2007.

[Coh78] Henri Cohen. "Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après R. Apéry)". In : *Séminaire de théorie des nombres de Grenoble.* T. 6. exp. n°6. 1977-1978, p. 1-9.

[Dir37] Peter Gustav Lejeune Dirichlet. "Beweis des Satzes, dass jede unbegrentze arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält." In : *Abhandlungen der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 48 (1837), p. 45-71.

[Eul40] Leonhard Euler. "De summis serierum reciprocarum". In : *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 7 (1740), p. 123-134.

[Eul44] Leonhard Euler. "De fractionibus continuis dissertatio". In : *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 9 (1744), p. 98-137. URL : https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/71/.

[FR16] Stéphane Fischler et Tanguy Rivoal. *On the denominators of the Taylor coefficients of G-functions.* 2016. arXiv : 1606.00706 [math.NT]. URL : https://arxiv.org/abs/1606.00706.

[Gel34] Alexander Osipovich Gelfond. “Sur le septième problème de Hilbert”. In : *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et naturelles* 4 (1934), p. 623-634.

[Hav03] Julian Havil. *Gamma : Exploring Euler's Constant*. Princeton University Press, 2003.

[Hea21] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics Volume 1 : From Thales to Euclid*. Clarendon Press, 1921.

[Her73] Charles Hermite. “Sur la fonction exponentielle”. In : *Comptes-rendus de l'Académie des sciences* 77 (1873), p. 18-24, 74-79, 226-233, 285-293. url : `http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/theorie-des-nombres/la-demonstration-de-la-transcendance-de-e`.

[Kla25] Erica Klarreich. “Rational or Not ? This Basic Math Question Took Decades to Answer.” In : *Quanta Magazine* (8 jan. 2025). url : `https://www.quantamagazine.org/rational-or-not-this-basic-math-question-took-decades-to-answer-20250108/` (visité le 23/05/2025).

[Lam61] Johann Heinrich Lambert. “Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques”. In : *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres, Berlin* 17 (1761), p. 265-322. url : `http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/theorie-des-nombres/lambert-et-l-irrationalite-de-p-1761`.

[Lin82] Ferdinand von Lindemann. “Ueber die Zahl π.*)”. In : *Mathematische Annalen* 20 (1882), p. 213-225.

[Lio44] Joseph Liouville. “À propos de l'existence des nombres transcendants”. In : *Comptes-rendus de l'Académie des sciences, séance du lundi 13 mai 1844* (1844), p. 1-3. url : `http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/theorie-des-nombres/propos-de-l-existence-des-nombres-transcendants`.

[MV06] Hugh L. Montgomery et Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I : Classical Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2006.

[Riv00] Tanguy Rivoal. “La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs”. In : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique* 331.4 (2000), p. 267-270.

[Sch35] Theodor Schneider. “Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I. Transzendenz von Potenzen.” In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1935.172 (1935), p. 65-69.

[Zud01] Wadim Zudilin. “One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational”. In : *Russian Mathematical Surveys* 56 (4 2001), p. 774-776.